Управление образования города Пензы
МКУ «Центр комплексного обслуживания и методологического обеспечения учреждений образования» города Пензы

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 66 города Пензы
имени Виктора Александровича Стукалова

XXVI научно-практическая конференция школьников города Пензы
«Я исследую мир»

Применение принципа Дирихле в решение задач

Выполнила: Попова Полина Сергеевна,
МБОУ СОШ № 66 г. Пензы
имени Виктора Александровича Стукалова 7и класс
Руководитель: Мамина Наталья Викторовна,
учитель математики МБОУ СОШ № 66 г. Пензы
имени Виктора Александровича Стукалова

Пенза, 2022

Введение:

Я участвую в различных математических олимпиадах и часто сталкиваюсь с задачами на логику. Решать их непросто. Учитель предложил мне познакомиться с «принципом Дирихле». Я захотела разобраться в нем, понять, как он работает в решении задач, самостоятельно прорешать некоторые олимпиадные задачи и попробовать составить свою.

Цель работы: Изучить «принцип Дирихле». Показать актуальность и эффективность в решении логических задач.

Задачи исследования:

Познакомиться с биографией ученого Густава Дирихле.

Разобраться в «принципе Дирихле» на доступном для себя уровне.

Рассмотреть примеры задач, решаемых с помощью «принципа Дирихле».

Составить практикум олимпиадных задач по данной теме.

Придумать свою задачу.

Гипотеза: «принцип Дирихле» расширяет возможности в процессе решения логических задач, делает их более упорядоченными и алгоритмичными.

Актуальность: Данная тема не обязательна на уроке математики, но она доступна, удобна и полезна в решении комбинаторных задач.

Основная часть:

Дирихле: Немецкий математик, иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук (1837), член многих других академий. Вместе с Лежандром доказал великую теорему Ферма для частного случая. Дирихле принадлежит ряд крупных открытий в самых разных областях математики, а также в механике и математической физике.

Принцип Дирихле:

Я нашла формулировку принципа Дирихле с понятным для себя объяснением. В нем говорится: если кролики рассажены в n клеток, причем количество кроликов больше, чем клеток, то хотя бы в одной клетке находится более одного кролика.

Если мы это будем переводить на язык математики, то у нас получится множество A, содержащее N+1 элементов; имеется N элементов, удовлетворяющих каким-либо различным свойствам, тогда хотя бы 2 элемента имеют одинаковое свойство.

Понятно, что в задаче, решаемой по принципу Дирихле, не обязательно будут кролики и клетки. Но важно правильно понять, что будет «клетками», а что «кроликами».

Применение принципа Дирихле:

Рассмотрим алгоритм применения принципа Дирихле:

Если в n клетках сидят не более (n-1) «зайцев», то есть пустая «клетка».

Если в n клетках сидят (n+1) «зайцев», то есть клетка, в которой не менее 2-х «зайцев».

Если в n клетках сидят не более (nk-1) «зайцев», то в какой-то из клеток сидят не более (k-1) «зайцев».

Если в n клетках сидят не менее (nk+1) «зайцев», то в какой-то из клеток сидят не менее k+1 «зайцев».

Среди n + 1 целых чисел найдутся два числа, дающие при делении на n один и тот же остаток.

Среди любых n + 1 целых чисел найдутся два числа таких, что их разность делится на n.
Если на отрезке длины L расположено несколько отрезков с суммой длин больше L, то хотя бы два из них имеют общую точку.
Если внутри фигуры площади S находится несколько фигур, имеющих сумму площадей больше S, то хотя бы две из них имеют общую точку.

Практическая часть:

Задача 1.

В школе учится 370 человек. Докажите, что среди всех учащихся найдутся 2 человека, празднующих свой день рождения в один и тот же день.

Решение: Так как в году 365 дней то обязательно найдутся хотя бы два человека у которых в один день будет день рождение.

То есть, 370 мы можем принять за кроликов, а 365 за клетки.

Получается, если в каждой клетке будет сидеть один «кролик», то останется ещё 5 «кроликов», значит, в одной из клеток как минимум будет 2 «кролика».

Задача 2.

Грани куба окрашены в 2 цвета. Докажите, что найдутся две соседние одноцветные грани.

Решение: Рассмотрим три грани куба, имеющие общую вершину. Назовем их «кроликами», а данные цвета- «клетками». По принципу Дирихле, найдутся две грани, окрашенные в один цвет. Они и будут соседними.

Задача 3.

В классе 30 человек. Паша сделал 13 ошибок, а остальные меньше. Доказать, что какие-то три ученика сделали одинаковое количество ошибок.
Решение: По условию задачи, наибольшее число ошибок, сделанных в работе 13. Значит, ученики могли сделать 0, 1, 2, ..., 13 ошибок. Эти варианты будут «клетками», а ученики станут «кроликами». Тогда мы понимаем, что если каждый человек совершит одну из отмеченных ошибок, то понятно, что, как минимум, 3 человека могло сделать одинаковое количество ошибок.
Задача 4.
Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.
Решение: Вариантов числа знакомых всего 5: от 0 до 4. Осталось заметить, что если у кого-то 4 знакомых, то ни у кого не может быть 0 знакомых.
Задача 5. (из олимпиады):
В мешке лежат 10 белых и 10 черных шаров. Они тщательно перемешаны и не различимы на ощупь. Какое наименьшее количество шаров нужно вынуть из мешка вслепую, чтобы них наверняка оказались два шара 1) одного цвета, 2) разного цвета, 3) белого цвета?
Решение: а) Чтобы у нас точно оказалось два шара одного цвета, нужно взять минимум 3 шара, так как первые два могут различаться. Ответ: 3.
б) Чтобы оказалось два шара разного цвета, мы берем минимум 11 шаров, так как сначала возможно вытащить все шары одного цвета. Ответ: 11.

в) Чтобы оказалось два белых шара, нужно взять количество черных (сначала мы можем вытащить их все) и прибавить еще два белых.

Ответ: 12

Задача 6.

Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату – 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.

Решение: Если бы каждый из рабочих мог купить магнитофон, то у них в сумме было бы не менее 5 • 320 = 1600 рублей.

Задача 7.

докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

Решение: Квадраты при делении на 100 могут давать лишь 51 остаток, так как остатки х и 100 – х при возведении в квадрат дают один и тот же остаток.

Задача 8.

На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Решение: В каждом размере каких-то сапог меньше: правых или левых. Выпишем эти типы сапог по размерам. Какой-то тип, например, левый, повторится по крайней мере дважды, например, в 41 и 42 размерах. Но так как количество левых сапог в этих размерах суммарно не меньше

100 (почему?), то мы имеем не менее 100 годных пар обуви в этих размерах.

Заключение: принцип Дирихле- это полезный и достаточно очевидный метод для доказательства утверждений о конечном множестве.

Вывод: Итак, изучив различные интернет источники, я познакомилась с биографией Густава Дирихле, разобрала принцип Дирихле, рассмотрела примеры решения логических задач с применением принципа, некоторые прорешала самостоятельно. Сделала подборку олимпиадных задач по данной теме. Составила свою. Вот она:

Каждый ученик класса из 25 человек может выбрать 1 дополнительное занятие в неделю: русскую словесность, математическую логику или разговорный английский. Могут ли на одно занятие ходить 9 человек из класса?

Решение: 1) 25:3=8(ост 1) людей, если разделятся поровну. Значит, если в каждой группе по 8, то остался ещё 1 человек.

2)8+1=9(чел)- может быть в какой-то группе.

Ответ: могут.

Список литературы:

pedagogika-smi.net

https://zen.yandex.ru

https://ru.wikipedia.org

https://multiurok.ru